

形式 Laurent 級数体の代数・位相的構造と距離化定理

本稿では、実数体 \mathbb{R} 上の一変数形式 Laurent 級数体 $\mathbb{R}((\varepsilon))$ が持つ豊かな構造（全順序体としての構造、順序位相、帰納極限位相、付値位相など）について、基礎的な定義から厳密な証明までを自己完結的 (self-contained) に解説します。また、直積空間の距離化 (metrization) に関する補題や、実数の構成に関する歴史的背景にも触れます。

1. 形式 Laurent 級数体 $\mathbb{R}((\varepsilon))$ の全順序体構造

定義 1.1 (形式 Laurent 級数体)

実数体 \mathbb{R} 上の形式 Laurent 級数体 (formal Laurent series field) $\mathbb{R}((\varepsilon))$ とは、ある整数 $k \in \mathbb{Z}$ と実数の数列 $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ を用いて次のように表される元の全体からなる体である。

$$f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \varepsilon^n = a_k \varepsilon^k + a_{k+1} \varepsilon^{k+1} + \dots$$

ここで $f \neq 0$ の場合、 $a_k \neq 0$ となるような最小の整数 k を f の付値 (valuation) または位数と呼び、 $v(f)$ と表す。また $a_k \varepsilon^k$ を最低次項と呼ぶ。

体 K に全順序 (total order) を入れるためには、「正の錐 (positive cone)」を定義し、それが順序体 (ordered field) の公理を満たすことを示せば十分です。

定義 1.2 (正の錐)

$\mathbb{R}((\varepsilon))$ の部分集合 P を、最低次項の係数が正であるような元の集合として定義する。すなわち、非零元 $f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \varepsilon^n$ ($a_k \neq 0$) に対して、

$$f \in P \iff a_k > 0$$

と定める。これにより、全順序関係を $f > g \iff f - g \in P$ によって定義する。

定理 1.3

$\mathbb{R}((\varepsilon))$ は上記で定義された P を正の錐として、全順序体 (totally ordered field) となる。

証明. 全順序体の公理を以下の通り確認する。

- 三分割律 (trichotomy):** 任意の $f \in \mathbb{R}((\varepsilon))$ に対し、 $f = 0$ 、あるいは最低次項の係数 a_k が正 ($f \in P$)、あるいは負 ($-f \in P$) のいずれか一つのみが成立する。
- 加法についての閉じ性:** $f, g \in P$ とし、 $f = a_k \varepsilon^k + \dots$ ($a_k > 0$)、 $g = b_m \varepsilon^m + \dots$ ($b_m > 0$) とおく。 $f + g$ の最低次項は、 $k < m$ なら $a_k \varepsilon^k$ 、 $k > m$ なら $b_m \varepsilon^m$ 、 $k = m$ なら $(a_k + b_k) \varepsilon^k$ である。いずれの場合も係数は正であるため、 $f + g \in P$ となる。
- 乗法についての閉じ性:** $f, g \in P$ のとき、 $f \cdot g$ の最低次項は $(a_k b_m) \varepsilon^{k+m}$ である。 $a_k > 0$ かつ $b_m > 0$ より $a_k b_m > 0$ なので、 $f \cdot g \in P$ である。

以上より、 $\mathbb{R}((\varepsilon))$ は全順序体である。

この順序構造は Archimedes の公理を満たさない非 Archimedes 的 (non-Archimedean) な性質を持ちます。例えば ε 自体を考えると、任意の正の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対して $r - \varepsilon = r \varepsilon^0 - \varepsilon^1$ の最低次項は $r > 0$ なので $r > \varepsilon > 0$ となり、 ε は無限小 (infinitesimal) となります。同様に ε^{-1} は正の無限大 (positive infinity) となります。

2. $\mathbb{R}((\varepsilon))$ の順序位相と基本近傍系

定義 2.1 (順序位相)

全順序集合 (X, \leq) における順序位相 (order topology) とは、任意の $a, b \in X$ ($a < b$) に対する开区間 $(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$ を開基 (base) として生成される位相である。

$\mathbb{R}((\varepsilon))$ には最大元も最小元も存在しないため、すべての開集合は开区間の和集合として表されます。この位相における原点 0 の基本近傍系 (fundamental system of neighborhoods) を考察します。

定理 2.2

$\mathbb{R}((\varepsilon))$ の順序位相において、 $V_n = \varepsilon^n \mathbb{R}[[\varepsilon]] = \{f \in \mathbb{R}((\varepsilon)) \mid v(f) \geq n\}$ とおく。このとき、集合族 $\{V_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は 0 の基本近傍系をなす。

証明. 順序位相における 0 の自然な开区間近傍を $U_n = (-\varepsilon^n, \varepsilon^n)$ とする。

任意の $f = a_k \varepsilon^k + \dots$ ($a_k \neq 0$) について、 $f \in U_n$ であるための条件を考える。

- $k < n$ の場合：最低次項の係数から $|f| > \varepsilon^n$ となり、 U_n に含まれない。
- $k > n$ の場合：最低次項から $|f| < \varepsilon^n$ となり、 U_n に含まれる。
- $k = n$ の場合： $|a_n| < 1$ のときに限り $|f| < \varepsilon^n$ となる。

このことから、次の包含関係が成り立つ。

$$V_{n+1} \subset U_n \subset V_n$$

U_n は順序位相で開集合であるため、それを含む V_n は 0 の近傍である。また、 0 の任意の開近傍 W はある U_n を含み、したがって $V_{n+1} \subset U_n \subset W$ となるため、 $\{V_n\}$ は基本近傍系をなす。

注 2.3 (clopen 集合と完全不連結性)

実は、上記の V_n は順序位相において開かつ閉である **clopen** (あるいはクロープン) な集合です。なぜなら、 $f \in V_n$ のとき、 $k = v(f) \geq n$ とすると开区間 $(f - \varepsilon^{k+1}, f + \varepsilon^{k+1})$ は完全に V_n に含まれるため内点となり (すなわち開集合)、補集合についても同様の議論が成立するからです。位相空間において、clopen 集合が多く存在する空間は完全不連結 (totally disconnected) などの性質を持ちます。関連する概念として、任意の開集合の閉包が開集合となるような空間は**超不連結 (extremally disconnected)** と呼ばれますが、本稿で扱う $\mathbb{R}((\varepsilon))$ の順序位相や付値位相は完全不連結ではあるものの、超不連結 (extremally disconnected) ではありません。

以上の議論により、順序位相において点列 $f_m \in \mathbb{R}((\varepsilon))$ が 0 に収束するための必要十分条件は、各項の実数係数の振る舞いに関わらず $\lim_{m \rightarrow \infty} v(f_m) = \infty$ となることであることが分かります。これは順序位相が付値位相 (valuation topology) と完全に一致することを示しています。

3. 直積位相と帰納極限位相を用いた $\mathbb{R}((\varepsilon))$ への位相の導入

次に、代数的な観点から $\mathbb{R}((\varepsilon))$ に別の位相を入れる方法を解説します。

定義 3.1 (形式的冪級数環の直積位相)

形式的冪級数環 $\mathbb{R}[[\varepsilon]]$ を、可算無限個の実数の直積空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ と自然に同一視し、これに直積位相 (product topology) を入れる。

$\mathbb{R}((\varepsilon))$ は負の次数の項 (極) を持つため、直積空間とは直ちに同一視できません。そこで、極の位数ごとに部分空間を考えます。非負整数 $m \geq 0$ に対し、 $V^{(m)} = \varepsilon^{-m} \mathbb{R}[[\varepsilon]]$ とおくと、これらはベクトル空間として $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ と同型であり、それぞれに

直積位相（これは Fréchet 空間の位相となります）を入れることができます。

定義 3.2 (帰納極限位相)

包含関係 $V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \dots \subset \mathbb{R}((\varepsilon))$ において、 $\mathbb{R}((\varepsilon)) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V^{(m)}$ が成り立つ。 $\mathbb{R}((\varepsilon))$ の部分集合 U が開集合であることの定義を、「任意の $m \geq 0$ に対して $U \cap V^{(m)}$ が $V^{(m)}$ の開集合となること」とする。この位相を **帰納極限位相 (inductive limit topology)** という。

この構成により、 $\mathbb{R}((\varepsilon))$ は関数解析において LF 空間 (limit of Fréchet spaces) と呼ばれるクラスになります。この位相での点列 $f^{(n)} \rightarrow 0$ の収束は、「すべての n に対して極の位数が一様に下に有界であり、かつ各次数の係数が \mathbb{R} において 0 に収束すること」を意味します。これは前節の順序位相（付値位相）とは異なる位相構造です。

4. 射影極限と誘導位相の性質

前節で $\mathbb{R}[[\varepsilon]]$ に直積位相を入れましたが、これを代数的な射影写像の族から構成することもできます。

定理 4.1

各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対する有限截断写像（射影）

$$f_n : \mathbb{R}[[\varepsilon]] \rightarrow \mathbb{R}[[\varepsilon]]/(\varepsilon^n) \cong \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

を考える。終域 \mathbb{R}^n に通常の Euclid 位相（直積位相）を入れたとき、すべての f_n を連続にする最弱の位相（始位相 / 射影極限位相 (projective limit topology)）は、 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ としての直積位相に一致する。

証明. 誘導される位相を \mathcal{T} 、直積位相を $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ とする。

\mathcal{T} の基本開集合は、 $f_n^{-1}(U)$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ は開集合) の形をしている。これは「最初の n 座標が \mathbb{R}^n の開集合に属し、それ以降は任意」という集合であり、明らかに $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ の開集合である。したがって $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\text{prod}}$ 。

逆に $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ の基本開集合は有限個の座標 i_1, \dots, i_m のみに開集合の制約を持つ。これらの最大値より大きな n を選べば、その基本開集合は \mathbb{R}^n のある開集合の f_n による逆像として表現できる。したがって $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subset \mathcal{T}$ 。

よって両者は一致する。 ■

代数幾何学などで ε -進位相 (ε -adic topology) を構成する際は、通常 $\mathbb{R}[[\varepsilon]]/(\varepsilon^n)$ に「離散位相 (discrete topology)」を入れます。しかしここで \mathbb{R}^n の「連続な位相」を入れることで、実数の解析的な近さと代数的な近さが融合した位相が表現されます。

5. Dedekind 切断と実数の厳密な構成

実数 \mathbb{R} やその上の位相を議論する上で、実数の連続性 (continuity) の厳密な定義は不可欠です。本稿でも用いている実数の完備性は、Richard Dedekind によって基礎付けられました。

Dedekind は 1858 年に微積分の講義を担当した際、幾何学的な直観に頼らない実数の算術的な基礎付けの必要性を痛感し、「Dedekind 切断 (Dedekind cuts)」の概念を考案しました。この成果は、**1872年**に以下の独立したモノグラフ（小冊子）として出版されました。

- 論文名 (ドイツ語原題) : *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (連続性と無理数)
- 著者: Richard Dedekind
- 出版社: Friedrich Vieweg & Sohn (Braunschweig)

現在、この論文はパブリックドメインとなっており、以下のリンクから参照可能です。

- [Project Gutenberg: Stetigkeit und irrationale Zahlen \(ドイツ語原文\)](#)
- [Project Gutenberg: Essays on the Theory of Numbers \(英訳版収録\)](#)

6. 直積空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の距離化関数の構成と極限

位相空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は可算個の距離空間の直積であるため、距離化可能 (metrizable) です。通常の距離化の証明では、各座標の実数の距離 $d(x, y) = |x - y|$ を有界にするために $f(d) = \min(1, d)$ や $f(d) = \frac{d}{1+d}$ といった関数を用います。

ここでは、より一般化された関数族 $f_a(x) = (1 + x^{-a})^{-1/a}$ が距離化関数として機能し、さらに $a \rightarrow \infty$ で $\min(1, x)$ に収束することを示します。

定理 6.1

$a > 0$ とする。関数 $f_a(x) = (1 + x^{-a})^{-1/a} = x(1 + x^a)^{-1/a}$ (ただし $x > 0$ とし、 $f_a(0) = 0$ と拡張する) は、直積空間の距離化に必要な以下の条件を満たす。

1. $f_a(x) = 0 \iff x = 0$
2. 連続かつ単調増加である。
3. 上に有界である。
4. 劣加法性 (subadditivity) を満たす: $f_a(x + y) \leq f_a(x) + f_a(y)$

さらに、任意の $x \geq 0$ に対して $\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(x) = \min(1, x)$ が成立する。

証明. [条件の確認]

条件1は定義より明らか。微分を計算すると、

$$f'_a(x) = (1 + x^a)^{-(a+1)/a}$$

となる。任意の $x \geq 0$ で $f'_a(x) > 0$ より単調増加であり (条件2)、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 1$ より $f_a(x) < 1$ となり上に有界である (条件3)。

また、 x の増加に伴い $1 + x^a$ は増加するため、その逆数乗である導関数 $f'_a(x)$ は単調減少する。すなわち $f_a(x)$ は上に凸な関数 (凹関数) である。 $f_a(0) = 0$ なる凹関数は劣加法性を満たすため、条件4も成立する。

[極限の証明]

$a \rightarrow \infty$ の極限を場合分けして計算する。

- $x = 0$ の場合: $f_a(0) = 0 = \min(1, 0)$ 。
- $0 < x < 1$ の場合: 対数をとると、

$$\ln(f_a(x)) = -\frac{1}{a} \ln(1 + x^{-a}) = -\frac{1}{a} (\ln(x^{-a}) + \ln(1 + x^a)) = \ln x - \frac{\ln(1 + x^a)}{a}$$

$a \rightarrow \infty$ のとき $x^a \rightarrow 0$ より第2項は0に収束するため、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \ln(f_a(x)) = \ln x$ 。よって $\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(x) = x = \min(1, x)$ 。

- $x = 1$ の場合: $f_a(1) = 2^{-1/a}$ であり、 $a \rightarrow \infty$ で $2^0 = 1 = \min(1, 1)$ に収束する。
- $x > 1$ の場合: $\lim_{a \rightarrow \infty} (1 + x^{-a})^{-1/a} = (1 + 0)^0 = 1 = \min(1, x)$ となる。

以上より、任意の $x \geq 0$ で $\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(x) = \min(1, x)$ が示された。 ■

参考文献

- Bourbaki, N. *General Topology (Topologie Générale)*. (位相空間論の基礎として)
- Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Vieweg.
- Zariski, O., & Samuel, P. *Commutative Algebra*. (形式冪級数環や付値位相の代数的な基礎として)